## Ⅲ．産業連関分析の道具

### (1) 道具の原理（原理を知ることは大切ですが少々難解な内容なので読みとばして頂いても結構です）

産出高＝Ｘ、中間投入＝ｘ、最終需要＝Ｆ、輸入＝Ｍ、粗付加価値＝Ｖとすると、産業連関表は、下表のように表されます。

| | | | 需　要　側 | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | 産業１ | 産業２ | 産業ｎ | 最終需要 | 輸　入 | 産　出　高 |
| 供給側 | 産　業　１ | $x_{11}$ | $x_{12}$ | $x_{1n}$ | $F_1$ | $-M_1$ | $X_1$ |
| | 産　業　２ | $x_{21}$ | $x_{22}$ | $x_{2n}$ | $F_2$ | $-M_2$ | $X_2$ |
| | ： | ： | ： | ： | ： | ： | ： |
| | ： | ： | ： | ： | ： | ： | ： |
| | 産　業　ｎ | $x_{n1}$ | $x_{n2}$ | $x_{nn}$ | $F_n$ | $-M_n$ | $X_n$ |
| | 粗付加価値 | $V_1$ | $V_2$ | $V_n$ | | | |
| | 産　出　高 | $X_1$ | $X_2$ | $X_n$ | | | |

産業連関表の、産業ｎの欄を横に見ていくと、次のようになります。

$$X_n = x_{n1} + x_{n2} + \cdots x_{nn} + F_n - M_n \qquad \cdots\cdots\cdots \quad (1)$$

中間投入を産出額で割ったものをａとすると、

$a_{nn} = x_{nn} ／ X_n$　　で表されます。これが中間投入率であり、(1)式は、

$$X_n = a_{n1} X_1 + a_{n2} X_2 + \cdots a_{nn} X_n + F_n - M_n \qquad \cdots\cdots\cdots \quad (2)$$

これを行列で表示すると、

$$\begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ X_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}、 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21}、 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1}、 & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ X_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} F_1 - M_1 \\ F_2 - M_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ F_n - M_n \end{pmatrix} \qquad \cdots\cdots\cdots \quad (3)$$

となります。

(3)式を簡略化するため

$$X = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ X_n \end{pmatrix}、A = \begin{pmatrix} a_{11}、 & a_{12} \cdots & a_{1n} \\ a_{21}、 & a_{22} \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1}、 & a_{n2} \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}、F = \begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ F_n \end{pmatrix}、M = \begin{pmatrix} M_1 \\ M_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ M_n \end{pmatrix}、I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ & \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

として、行列を文字で表すと、

$$X = AX + F - M \qquad \cdots\cdots\cdots \quad (4)$$

これから、　$(I - A) X = F - M$

$$X = (I - A)^{-1} (F - M) \qquad \cdots\cdots\cdots \quad (5)$$

最終需要Ｆは、県内最終需要Ｆｄと移輸出Ｅの合計であり、

$$F = Fd + E$$

の関係があります。

移輸入Mは、県内の中間需要ＡＸと県内最終需要Ｆｄの合計にそれぞれの産業の移輸入率 m を掛けたものであり、M = m（AX + Fd）とあらわされるので、各産業の移輸入率 m を対角要素に持つ行列を

$$\overline{M} = \begin{pmatrix} m_1, 0 & \cdots & 0 \\ 0, m_2 & \cdots & 0 \\ \vdots \quad \vdots & & \vdots \\ 0, \quad 0 & \cdots & m_n \end{pmatrix}$$ とすると、

$$M = \overline{M}(AX + Fd)$$ と表すことができます。

(4)式を書き直すと

$$\begin{aligned} X &= AX + Fd + E - M \\ &= AX + Fd + E - \overline{M}(AX + Fd) \\ &= AX + Fd + E - \overline{M}AX - \overline{M}Fd \\ X - AX + \overline{M}AX &= Fd + E - \overline{M}Fd \\ (I - A + \overline{M}A)X &= (I - \overline{M})Fd + E \\ \{I - (I - \overline{M})A\}X &= (I - \overline{M})Fd + E \\ X &= \{I - (I - \overline{M})A\}^{-1}\{(I - \overline{M})Fd + E\} \quad \cdots\cdots\cdots(6) \end{aligned}$$

$I - \overline{M}$ は全体から移輸入分を引いたもので、自給率を表します。したがって、(6)式の意味は、「県内生産高とは県内需要と移輸出の合計に自給率を考慮した投入係数の逆行列を乗じたもの」と言えます。

(6)式から、最終需要が増えた場合の生産高の増加は、

$$\varDelta X = \{I - (I - \overline{M})A\}^{-1}(I - \overline{M})\varDelta Fd$$

となります。

単純に考えられるよう、移輸出E、移輸入M、を全く無視して(4)からやり直すと、

$$X = AX + F \quad \cdots\cdots\cdots \quad (4)'$$

$$(I - A)X = F$$

$$X = (I - A)^{-1}F \quad \cdots\cdots\cdots \quad (5)'$$

(5)’式から、生産高の増加は、

$$\varDelta X = (I - A)^{-1}\varDelta F$$

となります。

$(I - A)^{-1}$ は逆行列係数表（**レオンチェフの逆行列**）といいます。これは、実数の級数展開と同じくＡを級数展開したものです。

実数ａ（０＜ａ＜１）について、

$$(1 - a)^{-1} = \frac{1}{1 - a} = 1 + a + a^2 + a^3 + a^4 + \cdots$$

となりますが、これと同じく、

$$(I - A)^{-1} = I + A + A^2 + A^3 + A^4 + \cdots$$

最終需要Ｆによる生産波及効果は、逆行列係数表により、次のように計算されます。

$$(I - A)^{-1}F = F + AF + A^2F + A^3F + A^4F + \cdots$$

### (2) 具体的な計算例

さて、仮想の数値例を用いて、具体的に計算を行ってみます。

| | A | B | F d | T |
|---|---|---|---|---|
| A | 10 | 20 | 70 | 100 |
| B | 40 | 100 | 60 | 200 |
| V | 50 | 80 | | |
| T | 100 | 200 | | |

### ・とりあえず、投入係数（中間投入額／県内生産額）を掛ける

今、新たな需要がＢ部門に 100 発生したとして、この需要を満たすために新たな生産を行うことになった場合、その生産に必要となる各原材料がどれらいになるかを求めるには、Ｂ部門に関する生産１単位当たりの原材料投入構成比（＝投入係数）を計算して、それに当初需要 100 を掛けることになります。

$$\begin{array}{c|c:c|}
 & A & B \\ \hline
A & \begin{matrix}0.1\\(=10/100)\end{matrix} & \begin{matrix}0.1\\(=20/200)\end{matrix} \\ \hdashline
B & \begin{matrix}0.4\\(=40/100)\end{matrix} & \begin{matrix}0.5\\(=100/200)\end{matrix} \\ \hline
\end{array}
\times
\begin{array}{c}
\mathrm{F\,d} \\ \hline
\multicolumn{1}{|c|}{0} \\ \hdashline
\multicolumn{1}{|c|}{100} \\ \hline
\end{array}
=
\begin{array}{|c:c|} \hline
0.1 \times 0 & 0.1 \times 100 \\ \hdashline
0.4 \times 0 & 0.5 \times 100 \\ \hline
\end{array}
\to
\begin{array}{|c|} \hline
10 \\ \hdashline
50 \\ \hline
\end{array}$$

↑

Ｂを 100 生産するのにも原材料としてＡを 10、Ｂを 50 必要とする。

### ・繰り返し計算による生産誘発額

上の計算から、新たな需要を満たすために必要とする原材料は、Ａを 10、Ｂを 50 必要とすることが求められた（間接効果の１次波及）が、次の段階ではそれらの原材料を生産するための生産活動が必要になります。

２回目

$$\begin{array}{|c:c|} \hline
0.1 & 0.1 \\ \hdashline
0.4 & 0.5 \\ \hline
\end{array}
\times
\begin{array}{|c|} \hline
10 \\ \hdashline
50 \\ \hline
\end{array}
=
\begin{array}{|c:c|} \hline
0.1 \times 10 & 0.1 \times 50 \\ \hdashline
0.4 \times 10 & 0.5 \times 50 \\ \hline
\end{array}
\to
\begin{array}{|c|} \hline
6 \\ \hdashline
29 \\ \hline
\end{array}$$

３回目

$$\begin{array}{|c:c|} \hline
0.1 & 0.1 \\ \hdashline
0.4 & 0.5 \\ \hline
\end{array}
\times
\begin{array}{|c|} \hline
6 \\ \hdashline
29 \\ \hline
\end{array}
=
\begin{array}{|c:c|} \hline
0.1 \times 6 & 0.1 \times 29 \\ \hdashline
0.4 \times 6 & 0.5 \times 29 \\ \hline
\end{array}
\to
\begin{array}{|c|} \hline
3.5 \\ \hdashline
16.9 \\ \hline
\end{array}$$

このような波及が、このあと続くことになりますが、これを程度収束値まで計算すると…

| 産業 | 直接効果 | 間接効果 | | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 計 |
| A | 0 | 10 | 6 | 3.5 | 2.04 | 1.19 | 0.69 | 0.40 | 0.24 | 0.14 | 0.08 | 0.05 | 0.03 | 0.02 | 0.01 | 24.38 |
| B | 100 | 50 | 29 | 16.9 | 9.85 | 5.74 | 3.35 | 1.95 | 1.14 | 0.66 | 0.39 | 0.23 | 0.13 | 0.08 | 0.04 | 119.45 |
| 計 | 100 | 60 | 35 | 20.4 | 11.9 | 6.93 | 4.04 | 2.35 | 1.37 | 0.80 | 0.47 | 0.27 | 0.16 | 0.09 | 0.05 | 143.83 |

このように、直接、間接的に誘発される効果の合計額（０に収束するまで計算した結果）を、**生産誘発額**といいます。

投入係数を使って逆行列を計算すると、

$$(I-A)^{-1} = \left(\begin{matrix}1.2195\\0.9756\end{matrix}\quad\boxed{\begin{matrix}0.2439\\2.1951\end{matrix}}\right)$$

$$(I-A)^{-1}\ F = \begin{pmatrix}24.39\\219.51\end{pmatrix}$$

これは、直接効果と間接効果を加えた結果と一致します。